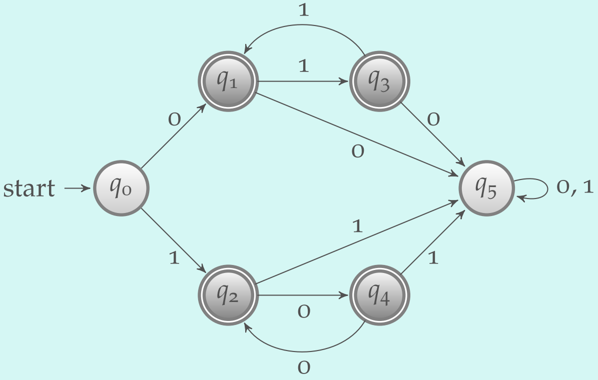
Automi a stati finiti

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo
Corso di Laurea in Informatica
Università di Roma "Tor Vergata"

Prof. Giorgio Gambosi

Dato il seguente AFD,



Individuare tre stringhe accettate e tre stringhe rifiutate dall'automa.
Descrivere il linguaggio accettato dall'automa.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w | w \text{ ogni } 0 \text{ in } w \text{ è seguito immediatamente da almeno due } 1\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w | w \neq \varepsilon \text{ e il primo simbolo di } w \text{ e l'ultimo sono uguali } \}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w \mid \mid w \mid = 7i, i \geq 0\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0,1\}^*$ definito come

$$L = \{0,1\}^* - \{\varepsilon\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w | w \text{ inizia con 1 e termina con 0}\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0,1\}^*$ definito come

$L = \{w | w \text{ contiene un numero pari di } 0, \text{ o contiene esattamente due } 1\}$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w | w \text{ contiene esattamente due} 0\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = \{w | w \text{ contiene esattamente due} 0 \text{ e almeno due } 1\}$$

.

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0,1\}^*$ definito come

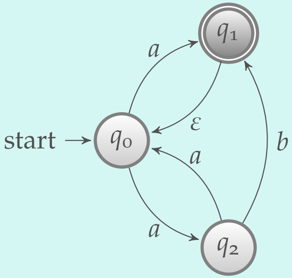
$$L = \{w \mid \mid w \mid mod 5 = 1\}$$

.

Utilizzare gli ASF per dimostrare che:

1. $L = \{a^n | n \geq 4\}$ è regolare
2. Se L è regolare allora $L \cup \{\varepsilon\}$ è regolare
3. Se L è regolare allora $\overline{L}$ è regolare

Dato il seguente AFND,



Quali tra le stringhe *aa*, *ba*, *aba*, *abb*, *abab* sono accettate dall'automa?

Definire un ASFND avente 3 stati e che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = 0^* 1^* 0^+$$

L è quindi l'insieme delle stringhe composte da una sequenza (eventualmente nulla) di 0 seguita da una sequenza (eventualmente nulla) di 1 seguita da una sequenza di almeno uno 0.

Definire un ASFND che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{a,b\}^*$ definito come

$$L_1 = \{a^n b a^m | n,m \geq 0\}$$

.

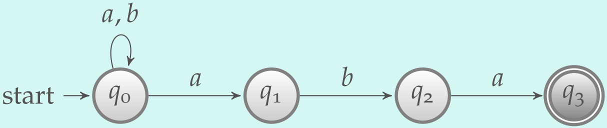
Definire un ASFND che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ definito come

$$L_1 = \{a^n b a^m | n, m \geq 0\}$$

.

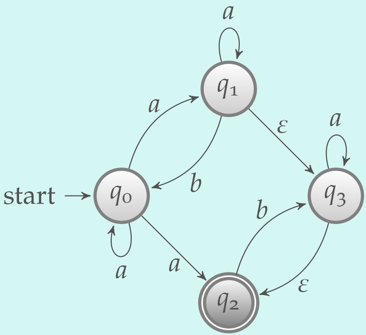
Trasformare l'ASFND del quiz precedente in un ASFD equivalente.

Dato il seguente AFND,



derivare un ASFD equivalente.

Dato il seguente AFND con ε-transizioni,



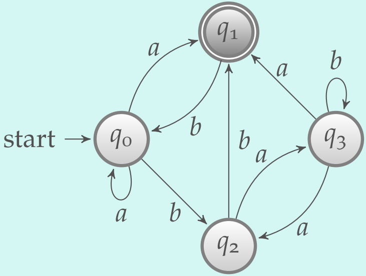
derivare un ASFND privo di ε-transizioni equivalente.

Dato il linguaggio L_1 del quizframeunsolveda precedente, definire un ASFND che riconosce il linguaggio $\overline{L_1} \cup L_1^R$.

Definire un ASFND avente 3 stati e che riconosce il linguaggio $L \subseteq \{0, 1\}^*$ definito come

$$L = 0^*1^*0^+$$

Dato il seguente grafo di transizione,



1. Il grafo rappresenta un ASFND $\mathscr{A}_N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Descrivere ognuna di tali componenti per l'automa in questione.
2. Costruire un ASFD $\mathscr{A}_D = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ equivalente a $\mathscr{A}_N$: definire gli elementi Q', δ', q_0', F' e descrivere poi l'automa mediante il relativo grafo di transizione.

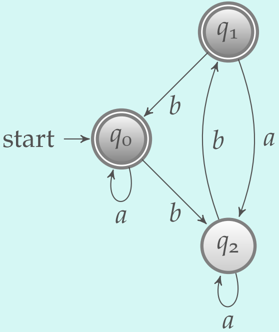
Definire gli ASFND che accettano i linguaggi descritti dalle seguenti espressioni regolari.

1. $(0+1)^{*}000(0+1)^{*}$
2. $(((00)^{*}(11))+01)^{*}$
3. ε^{*}

Definire gli ASFND che accettano i linguaggi descritti dalle seguenti espressioni regolari.

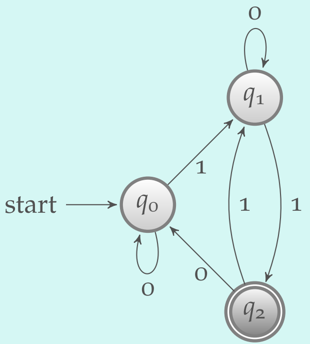
1. $\varepsilon + a(a + b)^*$
2. $(ab^*)^* + (ba^*)*$

Dato il seguente ASFD,



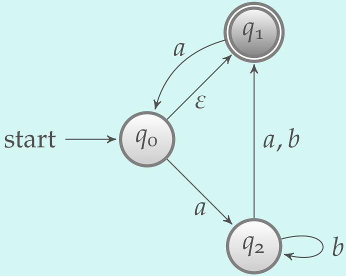
derivare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

Dato il seguente ASFD,



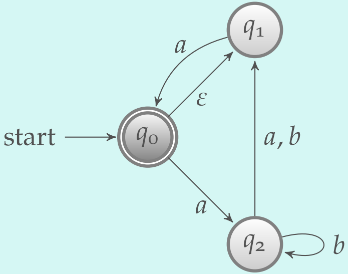
derivare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

Dato il seguente ASFND,



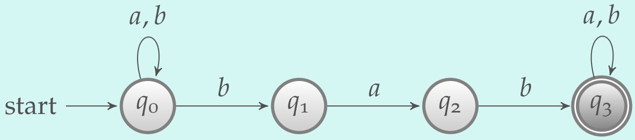
derivare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

Dato il seguente ASFND,



derivare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

Dato il seguente ASFND,



derivare un ASFD che riconosca lo stesso linguaggio.

In un ASFD $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, un *cammino* di lunghezza $n \geq 1$ è una sequenza di stati $q_1, \ldots, q_n$ tale che per ogni $1 \leq i \leq n-1$ abbiamo $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ per qualche $a \in \Sigma$. Si noti che ogni singolo stato può esser visto come un cammino di lunghezza 1. Un *ciclo* di lunghezza $n \geq 1$ è un cammino con il vincolo aggiuntivo che $\delta(q_n, a) = q_1$ per qualche $a \in \Sigma$: si noti che uno stato q tale che $\delta(q, a) = q$ per qualche $a \in \Sigma$ definisce un ciclo. Si dimostri il seguente enunciato:

Sia $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un ASFD che riconosce un linguaggio L infinito. Esiste allora (almeno) uno stato $q' \in Q$ per cui valgono le seguenti proprietà:

- *Esiste un cammino da q_0 a q'*
- *Esiste un ciclo che include q'*
- *Esiste un cammino da q' a qualche stato in F.*

In un ASFD $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, un *cammino* di lunghezza $n \geq 1$ è una sequenza di stati $q_1, \ldots, q_n$ tale che per ogni $1 \leq i \leq n-1$ abbiamo $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ per qualche $a \in \Sigma$. Si noti che ogni singolo stato può esser visto come un cammino di lunghezza 1. Un *ciclo* di lunghezza $n \geq 1$ è un cammino con il vincolo aggiuntivo che $\delta(q_n, a) = q_1$ per qualche $a \in \Sigma$: si noti che uno stato q tale che $\delta(q, a) = q$ per qualche $a \in \Sigma$ definisce un ciclo. Si dimostri il seguente enunciato:

Sia $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un ASFD che riconosce un linguaggio L infinito. Esiste allora (almeno) uno stato $q' \in Q$ per cui valgono le seguenti proprietà:

- *Esiste un cammino da q_0 a q'*
- *Esiste un ciclo che include q'*
- *Esiste un cammino da q' a qualche stato in F.*

Per ogni stringa $w \in \{0,1\}^*$ sia $\mathrm{double}(w)$ la stringa ottenuta sostituendo in w ogni occorrenza di 0 con 00 ed ogni occorrenza di 1 con 11. Per ogni linguaggio $L \subseteq \{0,1\}^*$ sia $\mathrm{double}(L) = \{\mathrm{double}(w) \mid w \in L\}$. Si definisca un procedimento che, dato un linguaggio L riconosciuto da un ASFD $\mathscr{A}$, derivi da esso l'automa $\mathscr{A}'$ che riconosce $\mathrm{double}(L)$.

Sia dato l'ASFND con ε-transizioni $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, \{q_F\})$ tale che non esistono né transizioni in q_0 né transizioni da q_F. Detto L il linguaggio accettato da $\mathscr{A}$, specificare quali linguaggi vengono accettati dai seguenti automi:

1. L'automa $\mathscr{A}_1$ ottenuto da $\mathscr{A}$ aggiungendo una ε-transizione da q_F a q_0.
2. L'automa $\mathscr{A}_2$ ottenuto da $\mathscr{A}$ aggiungendo una ε-transizione da q_0 a ogni stato raggiungibile da q_0.
3. L'automa $\mathscr{A}_3$ ottenuto da $\mathscr{A}$ aggiungendo una ε-transizione da ogni stato a partire da cui q_F è raggiungibile a q_F stesso.
4. L'automa $\mathscr{A}_4$ ottenuto applicando contemporaneamente le modifiche ai due punti precedenti.

Una stringa u è un prefisso di una stringa w se esiste v tale che $w = uv$. Dato un ASFND $\mathscr{A}$ che accetta un linguaggio $L = L(A)$ derivare un ASFND $\mathscr{A}_p$ che accetta il linguaggio $L_s = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è un prefisso di } x\}$.

Una stringa u è un suffisso di una stringa w se esiste v tale che $w = vu$.
Dato un ASFND $\mathscr{A}$ che accetta un linguaggio $L = L(A)$ derivare un ASFND $\mathscr{A}_s$ che accetta il linguaggio
$L_p = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è un suffisso di } x\}$

Sia $\mathscr{A}$ un ASFD con $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_8\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_3, q_4\}$ e δ definita nel modo seguente:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
a	q_1	q_3	q_4	q_3	q_4	q_6	q_2	q_3
b	q_4	q_1	q_2	q_5	q_6	q_3	q_4	q_1

Determinare un automa minimo equivalente a $\mathscr{A}$.

(Prova d'esame del 30-1-2006). Definire un ASFD che riconosca il linguaggio $L \subset \{a, b\}$ comprendente tutte le stringhe he non contengono la stringa *aba* al loro interno.

(Prova d'esame del 24-2-2006). Definire un algortmo che, dato un ASFD $\mathscr{A}$, determina intempo finito se $L(\mathscr{A})$ contiene almeno 100 stringhe.

(Prova d'esame del 24-2-2006). Sia dato l'ASFND A con $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_1\}$ e δ definita dalla tabella seguente:

	q_0	q_1
0	q_0	$\{q_0, q_1\}$
1	q_1	q_0

Si forniscano una grammatica regolare $\mathcal{G}$ e una espressione regolare $\mathcal{R}$ che definiscano entrambe il linguaggio $L(\mathcal{A})$ accettato da $\mathcal{A}$.

(Prova d'esame del 4-7-2006). Costruire un ASFND che accetti il linguaggio definito dall'espressione regolare $a(aa+ab)^*ab$

(Prova d'esame del 4-7-2006). Sia dato l'ASFD $\mathscr{A}$ con $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $F = \{q_4, q_5\}$ e δ definita dalla tabella seguente:

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
a	q_1	q_4	q_5	q_4	q_0	q_5
b	q_2	q_3	q_3	q_4	q_1	q_5

Derivare l'automa minimo equivalente ad $\mathscr{A}$.

(Prova d'esame del 13-9-2006). Sia dato l'ASFND $\mathscr{A}$ con $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_3\}$ e δ definita dalla tabella seguente:

	q_0	q_1	q_2	q_3
0		q_1	q_3	
1		$\{q_1, q_2\}$	q_3	
ε	$\{q_1, q_3\}$			

Derivare un ASFD, contenente soltanto stati raggiungibili, equivalente ad $\mathscr{A}$.

(Prova d'esame del 18-6-2007). Sia dato l'ASFND $\mathscr{A}$ con $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_3\}$ e δ definita dalla tabella seguente:

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	$\{q_0, q_1\}$		q_3	
b	q_0	q_2		

Derivare un ASFD, contenente soltanto stati raggiungibili, equivalente ad $\mathscr{A}$.

(Prova d'esame del 11-7-2007). Definire un ASFD che accetti il linguaggio $L \subset \{a, b\}^*$ tale che, per ogni $\sigma \in \{a, b\}^*$, $\sigma \in L$ se e solo se in σ compaiono non più di tre caratteri a.

(Prova d'esame del 12-9-2007). Si supponga di avere due linguaggi L_1, L_2 riconosciuti dai due automi a stati finiti deterministici $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$. Si descriva l'automa a stati finiti $\mathscr{A}$ che riconosce la differenza simmetrica di L_1 e L_2.

(Prova d'esame del 24-1-2008). Sia dato l'ASFND $\mathscr{A}$ con $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_3\}$ e δ definita dalla tabella seguente:

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$
ε	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Derivare un automa a stati finiti deterministico equivalente ad $\mathscr{A}$

(Prova d'esonero del 25-2-2015). Data l'espressione regolare $a^*b^* + b^*a^*$, costruire una automa a stati finiti deterministico che riconosca il linguaggio descritto da essa.

(Prova d'esonero del 9-2-2016). Si definisca un automa a stati finiti che riconosca l'insieme delle stringhe corrispondenti a numeri reali in notazione esponenziale e base 2, del tipo cioé xey dove x è un numero (eventualmente) con punto e parte decimale ed eventualmente con segno e y è un numero con eventuale segno, diverso da 0 e 1.

Si assume che un numero debba iniziare con una cifra diversa da 0 e che una parte decimale non termini per 0. Esempi: 1, -10, $+1.011$, $110e10$, $101e-10$, $10.01e1001$, $+1.0001e100$.

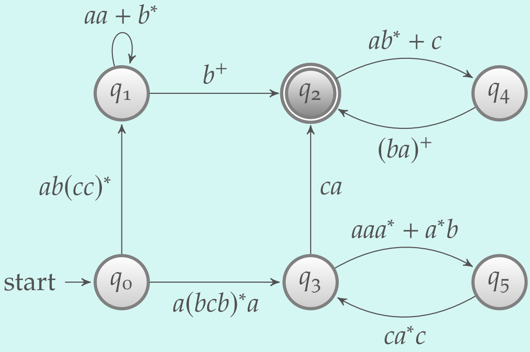
(Prova d'esonero del 4-3-2016). Sia dato il linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ | \text{ l'ultimo carattere in } w \text{ non è comparso prima}\}$$

Si definisca un automa a stati finiti che accetti L.

(Prova d'esame del 18-7-2016). Costruire un ASFD che riconosca il linguaggio descritto dall'espressione regolare $a((ab + aba)^*a)^*$

(Prova d'esame del 17-2-2016). Si consideri una estensione dei DFA in cui le transizioni sono associate ad espressioni regolari arbitrarie su Σ. Ad esempio:



Mostrare che l'insieme dei linguaggi riconoscibili dal modello esteso corrisponde ai linguaggi di tipo 3, mostrando l'equivalenza tra il