

Quiz sui linguaggi CF

Prof. Giorgio Gambosi

Quesito 1: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} , dove S, NP, VP, PP, A sono i simboli non terminali e $a, the, boy, girl, flower, touches, sees, likes, with$ sono i simboli terminali:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow NPVP \\ NP &\rightarrow AN \mid VPPP \\ VP &\rightarrow V \mid VNP \mid VPPP \\ PP &\rightarrow PNP \\ A &\rightarrow a \mid the \\ N &\rightarrow boy \mid girl \mid flower \\ V &\rightarrow touches \mid likes \mid sees \\ P &\rightarrow with \end{aligned}$$

Mostrare un albero sintattico della stringa $agirltouchesaboywithaflower$.

Quesito 2: Si consideri la seguente grammatica context free G :

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid 1 \mid 2 \mid 3$$

Mostrare gli alberi sintattici della stringa $3 - 2 - 1$.

Quesito 3: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$ sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Quesito 4: Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

Quesito 5: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{1^n + 1^m = 1^{n+m} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ sull'alfabeto $\Sigma = \{1, +, =\}$.

Quesito 6: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene almeno } 3 \text{ b}\}$.

Quesito 7: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha lunghezza dispari, il simbolo centrale è } b, \text{ e il primo e l'ultimo simbolo sono uguali}\}$.

Quesito 8: Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni parentetiche corrette.

Quesito 9: Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni regolari sull'alfabeto $\{0, 1\}$.

Quesito 10: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{a^m b^n \mid n \leq m \leq 2n\}$.

Quesito 11: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \mid w \in \{a, d\}^*, w \text{ ha un numero di } b \text{ doppio del numero di } a\}$. Mostrare gli alberi sintattici di $abaabaa$ e di $babbaa$ in tale linguaggio.

Quesito 12: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio di tutte le stringhe su $\{a, b\}$ che non sono palindrome.

Quesito 13: Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

Quesito 14: Descrivere il linguaggio generato dalla grammatica CF seguente:

$$S \rightarrow bS \mid Sa \mid aSb \mid \varepsilon$$

Quesito 15: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n} \mid n \geq 0\}$ su $\Sigma = \{a, b\}$ non è context free.

Quesito 16: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Quesito 17: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i < j < k\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Quesito 18: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{0^m 1^n \mid n = m^2\}$ su $\Sigma = \{0, 1\}$ non è context free.

Quesito 19: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n \mid n \text{ è primo}\}$ su $\Sigma = \{a\}$ non è context free.

Quesito 20: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$ su $\Sigma = \{a, b\}$ non è context free.

Quesito 21: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2n\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Quesito 22: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$$

1. Mostrare (per induzione) che ogni stringa $w \in L(\mathcal{G})$ non contiene ba come sottostringa.
2. Descrivere il linguaggio $L(\mathcal{G})$.

Quesito 23: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow ABC$$

$$A \rightarrow Sa \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Cc$$

Derivare in \mathcal{G} le stringhe $aaccc$ e $aabccc$.

Quesito 24: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow A \mid Ab$$

$$A \rightarrow a \mid ab \mid S$$

1. Mostrare che \mathcal{G} è ambigua individuando una stringa w e due diversi alberi sintattici di w .
2. Definire una grammatica \mathcal{G}' equivalente a \mathcal{G} e non ambigua.

Quesito 25: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow A \mid XY$$

$$X \rightarrow Ya \mid b$$

$$Y \rightarrow aX \mid b$$

1. Dare una definizione concisa del linguaggio $L(\mathcal{G})$ generato da \mathcal{G} .
2. Mostrare che \mathcal{G} è ambigua individuando una stringa w e due diversi alberi sintattici di w .
3. Definire una grammatica \mathcal{G}' equivalente a \mathcal{G} e non ambigua.

Quesito 26: Sia \mathcal{G} una grammatica CF in Forma Normale di Chomsky. Sia $w \in L(\mathcal{G})$ una stringa di lunghezza n . Qual è la lunghezza di una derivazione di w ?

Quesito 27: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow a \mid C \\ B &\rightarrow b \mid C \\ C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow ab \mid A \mid B \end{aligned}$$

Semplificare \mathcal{G} fino ad ottenere una grammatica \mathcal{G}' equivalente in CNF.

Quesito 28: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AAS \mid A \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow 0A1 \mid 0B1 \\ B &\rightarrow B1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Semplificare \mathcal{G} fino ad ottenere una grammatica \mathcal{G}' equivalente in CNF, eccetto che per la generazione della stringa ε .

Quesito 29: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbb \mid T \\ T &\rightarrow bTaa \mid S \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. Derivare una grammatica CF \mathcal{G}' priva di ε -produzioni e di produzioni unitarie e tale che $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$
2. Derivare da \mathcal{G}' una grammatica \mathcal{G}'' in Forma Normale di Chomsky tale che $L(\mathcal{G}'') = L(\mathcal{G}')$
3. Derivare da \mathcal{G}'' una grammatica \mathcal{G}''' in Forma Normale di Greibach tale che $L(\mathcal{G}''') = L(\mathcal{G}'')$
4. Mostrare una derivazione di $abaabb$ per ognuna delle grammatiche derivate.

Quesito 30: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

Derivare una grammatica equivalente a G e priva di simboli inutili.

Quesito 31: Dimostrare che se L è un linguaggio CF allora il linguaggio $\text{prefix}(L) = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è un prefisso di } x\}$ è CF.

Quesito 32: Dimostrare che se L è un linguaggio CF allora il linguaggio $L^R = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è pari a } x \text{ rovesciata}\}$ è CF.

Quesito 33: Mostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^m \mid n = 2m + 1\}$ è context free.

Quesito 34: Ridurre la seguente grammatica in Forma Normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABS \mid AA \mid A \mid a \\ A &\rightarrow aAb \mid aBb \mid B \\ B &\rightarrow Bb \mid b \end{aligned}$$

Quesito 35: Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ tale che per ogni stringa $\sigma \in L$ si ha $\#_a(\sigma) = \#_b(\sigma) + \#_c(\sigma)$ (dove $\#_a(\sigma)$, $\#_b(\sigma)$, $\#_c(\sigma)$ sono il numero di caratteri a, b, c in σ).

Il linguaggio è regolare? Motivare la risposta.
 Il linguaggio è context-free? Motivare la risposta.

Quesito 36: Mostrare che la grammatica seguente è ambigua.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + E \mid E * E \mid I \\ I &\rightarrow a \mid b \mid c \end{aligned}$$

Quesito 37: Sia \mathcal{G} una grammatica in CNF (Forma Normale di Chomsky). Mostrare che, per ogni stringa $w \in L(\mathcal{G})$, tutte le possibili derivazioni di w hanno la stessa lunghezza. Mostrare inoltre la relazione tra la lunghezza di una derivazione e la lunghezza $n = |w|$ della stringa.

Quesito 38: Dimostrare che il linguaggio $\{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2m\}$ non è context free.

Quesito 39: Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow baB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Quesito 40: Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

Quesito 41: Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ tale che $\sigma \in L$ se e solo se $\sigma \in \{a, b\}^*$ e σ non è palindroma. L è context free? Motivare la risposta.

Quesito 42: Definire una grammatica context free che generi il linguaggio $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$.

Quesito 43: Mostare che la grammatica seguente, con assioma S , è ambigua:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \\ X &\rightarrow Ya \mid b \\ Y &\rightarrow aX \mid b \end{aligned}$$

Quesito 44: Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n}, n \geq 0\}$. L è context free? Motivare la risposta.

Quesito 45: Dato l'alfabeto $\Sigma = \{(\,, \,), \,a, \,b\}$, definire una grammatica context free che generi tutte le stringhe corrispondenti a espressioni parentetiche bilanciate su Σ .

Quesito 46: Sia data la grammatica seguente, con assioma S .

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow aAbb \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bB \mid A \mid b \end{aligned}$$

Derivare una grammatica in CNF equivalente a G .

Quesito 47: Si definisca una grammatica context free che generi il linguaggio $L = \{a^r b^s c^t \mid t = r - s\}$.

Quesito 48: Si definisca una grammatica in Forma Normale di Chomsky che generi il seguente linguaggio.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid |w| \text{ pari e } w \text{ inizia e termina con lo stesso carattere}\}$$

Quesito 49: Mostrare che la seguente grammatica è ambigua, individuando una stringa con due diversi alberi sintattici (o derivazioni sinistre)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab|aaB \\ A &\rightarrow a|Aa \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Si descriva il linguaggio generato e si definisca una grammatica equivalente non ambigua.

Quesito 50: Si definisca una grammatica in CNF equivalente alla seguente

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A0|1B1|BB \\ A &\rightarrow C \\ B &\rightarrow S|A \\ C &\rightarrow S|\varepsilon \end{aligned}$$

Quesito 51: Sia dato il linguaggio

$$L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n - m|\}$$

Definire una grammatica context free che generi il linguaggio. Discutere se la grammatica risultante è ambigua.

Quesito 52: Verificare se il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i < j \wedge i < k\}$$

è context free o meno.