AUTOMI A STATI FINITI

Corso di Fondamenti di Informatica - modulo I

Giorgio Gambosi

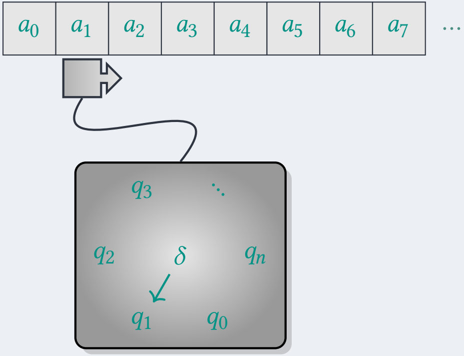
a.a. 2023-2024

CdL in Informatica - Università di Roma Tor Vergata

Un automa a stati finiti deterministico (ASFD) è una quintupla $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, dove

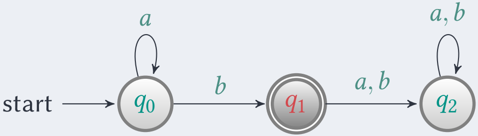
- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ è l'alfabeto di input
- $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$ è un insieme finito e non vuoto di stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ è la funzione (totale) di transizione che ad ogni coppia $\langle \mathit{stato},\ \mathit{carattere\ in\ input} \rangle$ associa uno stato successivo.

ASFD



Nastro unidirezionale

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2	q_2



Configurazione di un ASF

Dato un automa a stati finiti $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, una configurazione di A è una coppia (q, x), con $q \in Q$ e $x \in \Sigma^*$.

Una configurazione $\langle q, x \rangle$, $q \in Q$ ed $x \in \Sigma^*$, di A, è detta:

- iniziale se $q = q_0$
- finale se $x = \varepsilon$
- accettante se $x = \varepsilon$ e $q \in F$

Transizioni di un ASF

Dato un ASFD $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ e due configurazioni (q, x) e (q', y) di A, avremo che $(q, x) \underset{A}{\longmapsto} (q', y)$ se e solo se valgono le due condizioni:

1. $x = ay$, per un qualche $a \in \Sigma$
2. $\delta(q, a) = q'$.

Accettazione da un ASFD

Dato un automa a stati finiti deterministico $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, una stringa $x \in \Sigma^*$ è accettata da A se e solo se

$$(q_0, x) \overset{*}{\underset{A}{\longmapsto}} (q, \varepsilon)$$

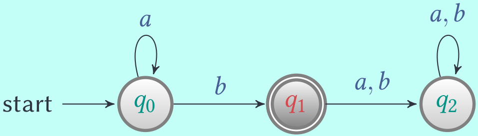
con $q \in F$

Possiamo definire il linguaggio riconosciuto da A come

$$L(A) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid (q_0, x) \overset{*}{\underset{A}{\longmapsto}} (q, \varepsilon), q \in F \right\}.$$

Esempio

La stringa aab è accettata dall'automa a stati finiti deterministico



Infatti, a partire dalla configurazione iniziale (q_0, aab) l'automa raggiunge la configurazione di accettazione (q_1, ε) per mezzo della computazione

$$(q_0, aab) \longmapsto (q_0, ab) \longmapsto (q_0, b) \longmapsto (q_1, \varepsilon)$$

Funzione di transizione estesa

Dato un automa a stati finiti deterministico $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, la sua funzione di transizione estesa

$$\overline{\delta} : Q \times \Sigma^* \mapsto Q$$

è definita come chiusura transitiva della δ:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\delta}(q, \varepsilon) & = & q \\ \overline{\delta}(q, xa) & = & \delta\left(\overline{\delta}(q, x), a\right), \end{array}$$

dove $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$.

Una stringa $x \in \Sigma^*$ è accettata da $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ se e solo se $\overline{\delta}(q_0, x) \in F$

Linguaggio riconosciuto da ASFD

Il linguaggio riconosciuto da un automa a stati finiti deterministico A è l'insieme

$$L(A) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid \overline{\delta}(q_0, x) \in F \right\}.$$

Esempio

Al fine di verificare che la stringa aab è accettata dall'ASFD precedente, deriviamo il valore di $\delta(q_0, aab)$ nel modo seguente:

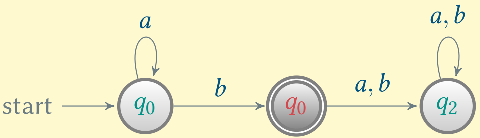
$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}(q_0, aab) &= \delta\left(\bar{\delta}(q_0, aa), b\right) \\
&= \delta\left(\delta\left(\bar{\delta}(q_0, a), a\right), b\right) \\
&= \delta\left(\delta\left(\delta\left(\bar{\delta}(q_0, \varepsilon), a\right), a\right), b\right) \\
&= \delta\left(\delta\left(\delta\left(q_0, a\right), a\right), b\right) \\
&= \delta\left(\delta\left(q_0, a\right), b\right) \\
&= \delta\left(q_0, b\right) \\
&= q_1
\end{aligned}
$$

Esercizio

Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$. Questo linguaggio è generato dalla grammatica G le cui produzioni sono:

$$S \longrightarrow aS \mid b.$$

Si dimostri che il linguaggio L è il linguaggio riconosciuto dall'automa



Esempio

Il linguaggio delle parole sull'alfabeto $\{a, b\}$ che contengono un numero pari di a o un numero pari di b è riconosciuto dall'automa $A = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\} \rangle$, con funzione di transizione

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_3	q_0
q_3	q_2	q_1

Esercizio

Definire un ASFD che riconosce le stringhe su $\{a, b\}$ caratterizzate dal fatto che il secondo carattere è b.

Esercizio

Definire un ASFD che riconosce le stringhe su $\{a, b\}$ caratterizzate dal fatto che il penultimo carattere è b.

Funzione di transizione parziale

La funzione di transizione δ è stata definita come totale.

Ogni ASFD $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ con funzione di transizione δ non totale può essere trasformato in un ASFD $A' = \langle \Sigma, Q', \delta', q_0, F \rangle$ con funzione di transizione totale ed equivalente, ponendo $Q' = Q \cup \{\overline{q}\}$ e δ' tale che come:

1. Se $\delta(q, a), q \in Q$ è definito allora $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$
2. Se $\delta(q, a), q \in Q$ non è definito allora $\delta'(q, a) = \overline{q}$
3. $\delta'(\overline{q}, a) = \overline{q}$ per ogni $a \in \Sigma$

Linguaggi decisi da ASFD

Insieme R dei linguaggi decisi da automi a stati finiti deterministici:

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* | \exists \text{ AFSD } A \text{ tale che } L = L(\mathscr{A})\}$$

Questa classe di linguaggi coincide con quella dei linguaggi generati dalle grammatiche di tipo 3 e con quella dei linguaggi definiti da espressioni regolari

Un automa a stati finiti non deterministico è una quintupla $A_N = \langle \Sigma, Q, \delta_N, q_0, F \rangle$, in cui

- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ è l'alfabeto di input
- $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$ è un insieme finito e non vuoto di stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali
- $\delta_N : Q \times \Sigma \mapsto P(Q)$ è una funzione (parziale), detta funzione di transizione, che ad ogni coppia $\langle \mathit{stato}, \mathit{carattere} \rangle$ su cui è definita associa un sottoinsieme di Q (eventualmente vuoto)

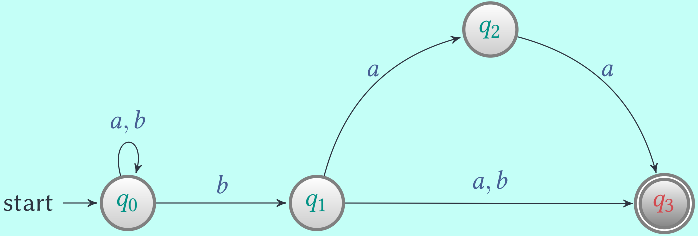
Esempio

Funzione di transizione di un automa a stati finiti non deterministico:

δ_N	a	b
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$

Esempio

Un automa a stati finiti non deterministico può essere anch'esso descritto, così come un ASFD, per mezzo di un grafo di transizione



Computazioni di un AFSND

Un automa a stati finiti non deterministico definisce, data una stringa in input, un insieme di computazioni.

Alternativamente, possiamo considerare che l'automa esegua una sola computazione non deterministica nel corso della quale, per ogni carattere letto, assume non uno solo, ma un insieme di stati attuali e transita, ad ogni nuovo carattere, non da stato a stato ma da un insieme di stati ad un insieme di stati.

Esempio

L'automa precedente definisce, in corrispondenza alla stringa in input bba, le tre computazioni:

- $(q_0, bba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_0, ba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_0, a) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_0, \varepsilon)$;
- $(q_0, bba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_0, ba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_1, a) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_2, \varepsilon)$;
- $(q_0, bba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_0, ba) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_1, a) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_3, \varepsilon)$.

Il prefisso bb della stringa di input dà luogo anche alla computazione:

- $(q_0, bb) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_1, b) \vdash\!\!\!\longrightarrow (q_3, \varepsilon)$;

la quale però non presenta continuazioni possibili.

Albero di computazione corrispondente

$$
\begin{tikzcd}
 & (q_1, ba) \arrow[r] & (q_3, a) & \\
(q_0, bba) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & (q_0, ba) \arrow[r] \arrow[dr] & (q_0, a) \arrow[r] & (q_0, \varepsilon) \\
 & & (q_1, a) \arrow[r] \arrow[dr] & (q_2, \varepsilon) \\
 & & & (q_3, \varepsilon)
\end{tikzcd}
$$

Esempio

Alternativamente, possiamo considerare che l'automa definisca la computazione non deterministica:

$$(\{q_0\}, bba) \longmapsto (\{q_0, q_1\}, ba) \longmapsto (\{q_0, q_1, q_3\}, a) \longmapsto (\{q_0, q_2, q_3\}, \varepsilon)$$

Accettazione da ASFND

Una stringa x viene accettata da un automa a stati finiti non deterministico se almeno una delle computazioni definite per la stringa stessa è di accettazione, quindi se

$$(\{q_0\}, x) \overset{*}{\longmapsto} (Q, \varepsilon) \qquad \text{con} \qquad Q \subseteq Q$$

e

$$Q \cap F \neq \emptyset$$

Funzione di transizione estesa di un ASFND

Dato un ASFND, la funzione di transizione estesa è la funzione $\overline{\delta}_N : Q \times \Sigma^* \mapsto P(Q)$, definita nel seguente modo

$$\begin{aligned}\overline{\delta}_N(q, \varepsilon) &= \{q\} \\ \overline{\delta}_N(q, xa) &= \bigcup_{p \in \overline{\delta}_N(q,x)} \delta_N(p, a)\end{aligned}$$

dove $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$, $p \in Q$.

Dato uno stato q ed una stringa x in input, $q' \in \overline{\delta}_N(q, x)$ se e solo se esiste una computazione dell'automa la quale, a partire da q ed in conseguenza della lettura della stringa x, conduce allo stato q'

Linguaggio accettato da un ASFND

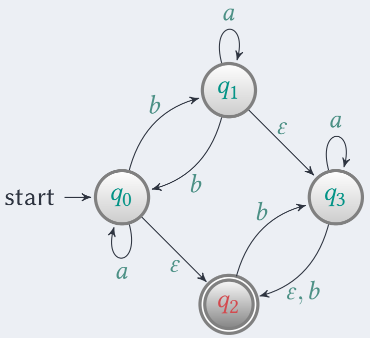
Il linguaggio $L(A)$ accettato da un ASFND A è definito come:

$$L(A) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid (\{q_0\}, x) \overset{*}{\longmapsto} (Q, \varepsilon), Q \cap F \neq \emptyset \right\}.$$

o anche come

$$L(\mathscr{A}_N) = \left\{ x \in \Sigma^* \middle| \overline{\delta}_N(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \right\}.$$

Un ε-ASFND è un ASFND con $\delta_N : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto P(Q)$, nella quale sono quindi ammesse ε-transizioni.



Non determinismo e ε-transizioni

La presenza di ε transizioni in un ASF rende di per sé l'automa non deterministico

La singola ε-transizione, potendo aver luogo o meno, è inerentemente non deterministica

ε-chiusura

Dato uno stato q dell'automa, la sua ε-chiusura è l'insieme $\varepsilon(q)$ degli stati raggiungibili da q mediante una sequenza (anche nulla) di ε-transizioni.

Con riferimento all'automa precedente:

q	$\varepsilon(q)$
q_0	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_2, q_3\}$

Funzione di transizione estesa

La funzione di transizione estesa $\hat{\delta}$ è definita come:

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon(q)$
2. Per ogni $x \in \Sigma^*$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$, dove $P = \{p | \exists r \in \hat{\delta}(q, x) \text{ tale che } p \in \delta(r, a)\}$; vale a dire l'unione delle ε-chiusure di tutti gli stati raggiungibili da un qualche stato in $\hat{\delta}(q, x)$, avendo in input il carattere a

Dato $P \subseteq Q$, $\varepsilon(P)$ è l'unione delle ε-chiusure di tutti gli stati in P: $\varepsilon(P) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$.

Esempio

Per l'automa precedente,

$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$, e quindi $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(P)$, dove $P = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0\}$, per cui $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$

$\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(P)$, con $P = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_1, q_3\}$, per cui $\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(q_1) \cup \varepsilon(q_3) = \{q_1, q_2, q_3\}$

Equivalenza ASFND e ε-ASFND

Dato un ASFND che riconosce un linguaggio L, esiste corrispondentemente un ε-ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L; viceversa, dato un ε-ASFND che riconosce un linguaggio L', esiste un ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L'.

La prima implicazione è evidente, in quanto un ASFND è un caso particolare di ε-ASFND

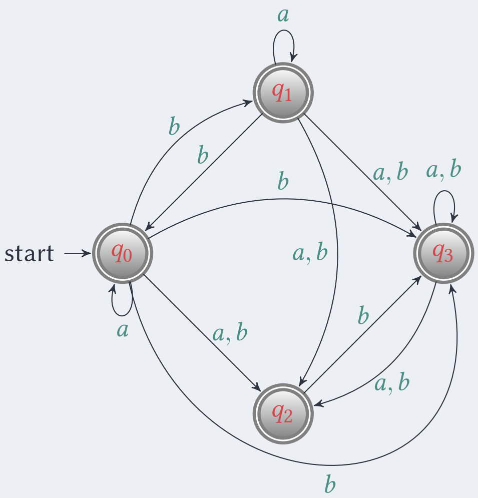
Per l'implicazione inversa, definiamo una procedura algoritmica che deriva una ASFND equivalente da un ε-ASFND dato.

1. per ogni $q \in Q$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\delta_N(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$
2. $q_0' = q_0$
3. $F' = \{q \in Q | \varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset\}$

Problema: mostrare che i due automi sono equivalenti.

Equivalenza ASFND e ε-ASFND

Per l'automa precedente, si ottiene



Esercizio

Definiamo come ε-ASFD un automa a stati finiti deterministico esteso da un insieme di ε-transizioni.

Mostrare l'equivalenza tra ε-ASFD e ASFND.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFD che riconosce un linguaggio L, esiste corrispondentemente un ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L; viceversa, dato un ASFND che riconosce un linguaggio L', esiste un ASFD che riconosce lo stesso linguaggio L'.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFD $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, un ASFND equivalente $A_N =< \Sigma, Q', \delta_N, q'_0, F' >$ è derivabile immediatamente ponendo

- $Q' = Q$
- $q'_0 = q_0$
- $F' = F$
- δ_N tale che $\forall a \in \Sigma, q \in Q$, $\delta_N(q, a) = \{q'\}$ se e solo se $\delta(q, a) = q'$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFND $A_N =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$, un ASFD equivalente $A' = \left\langle \Sigma, Q', \delta', q_0', F' \right\rangle$ è derivabile nel modo seguente:

L'insieme Q' è in corrispondenza biunivoca con $\mathscr{P}(Q)$ (quindi $| Q' |= 2^{|Q|}$).

Indichiamo come $[q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}] \in Q'$ lo stato corrispondente all'insieme $\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \subseteq Q$: i nomi degli stati di Q sono ordinati lessicograficamente.

Quindi Q' risulta definito come:

$$Q' = \left\{[q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}] \middle| \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \in \mathscr{P}(Q)\right\}.$$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Lo stato iniziale è $q_0' = [q_0]$.

Gli stati finali F' corrispondono ai sottoinsiemi di Q che contengono almeno un elemento di F:

$$F' = \left\{[q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}] \mid \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \in \mathscr{P}(Q) \land \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \cap F \neq \emptyset\right\}.$$

δ' è definita nel seguente modo:

$$\forall q_{i_1}, \ldots, q_{i_k} \in Q, \forall a \in \Sigma,\ \delta'\big([q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}], a\big) = [q_{j_1}, \ldots, q_{j_h}],$$

se e solo se

$$\delta_N(q_{i_1}, a) \cup \ldots \cup \delta_N(q_{i_k}, a) = \{q_{j_1}, \ldots, q_{j_h}\}$$

con $k > 0$ e $h \geq 0$.

Inoltre, si assume che per ogni $a \in \Sigma$ sia $\delta'([\ ], a) = [\ ]$.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Come mostrare che A_N e A sono equivalenti?

È necessario mostrare che, per ogni $x \in \Sigma^*$, se x è accettata da A_N allora è accettata da A. Inoltre, se è accettata da A allora è accettata anche da A_N.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dimostrazione "più forte", che ad ogni computazione effettuata dall'automa A ne corrisponde una equivalente dell'automa A_N e viceversa. Cioè che $\forall x \in \Sigma^*$,

$$\overline{\delta}'([q_0], x) = [q_{j_1}, \dots, q_{j_h}] \iff \overline{\delta}_N(q_0, x) = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_h}\}.$$

Se questo è vero, ne deriva che ogni stringa x o è accettata da sia da A che da A_N, o non è accettata da nessuno dei due automi.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dimostrazione per induzione su $|x|$.

Passo base: $(| x |= 0)$. In questo caso vale necessariamente $x = \varepsilon$, per cui abbiamo $\overline{\delta}_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$ e $\overline{\delta}'([q_0], \varepsilon) = [q_0]$.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Passo induttivo: $(\mid x \mid > 0)$. Supponiamo che la proprietà sia vera per $\mid x \mid = m$ e dimostriamo che esso continua a valere per $\mid x \mid = m + 1$.

Poniamo $x = x'a$, con $\mid x' \mid = m$. Per $\overline{\delta}_N$ abbiamo:

$$\overline{\delta}_N(q_0, x'a) = \bigcup_{p \in \overline{\delta}_N(q_0, x')} \delta_N(p, a).$$

Supponendo che $\overline{\delta}_N(q_0, x') = \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\}$ e che $\delta_N(q_{i_1}, a) \cup \ldots \cup \delta_N(q_{i_k}, a) = \{q_{j_1}, \ldots, q_{j_h}\}$ otteniamo

$$\overline{\delta}_N(q_0, x'a) = \{q_{j_1}, \ldots, q_{j_h}\}.$$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Per $\overline{\delta}'$ vale:

$$\overline{\delta}'(q_0, x'a) = \delta'(\overline{\delta}'([q_0], x'), a).$$

Essendo $\mid x' \mid = m$ possiamo sfruttare l'ipotesi induttiva, e quindi:

$$\delta'(\overline{\delta}'([q_0], x'), a) = \delta'([q_{i_1}, \dots, q_{i_k}], a),$$

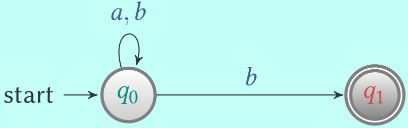
che, per costruzione, vale proprio $[q_{j_1}, \dots, q_{j_h}]$.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

La dimostrazione è completata osservando che $\overline{\delta}'([q_0], x) \in F'$ esattamente quando $\delta_N(q_0, x)$ contiene uno stato di Q che è in F.

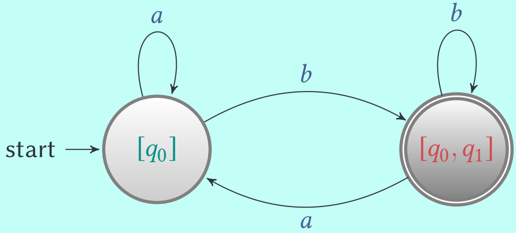
Esempio

ASFND che riconosce le stringhe in $\{a, b\}^*$ terminanti con b



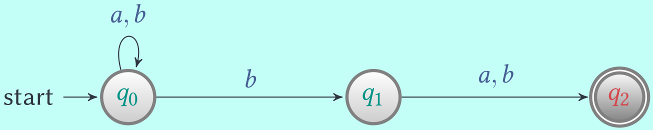
Esempio

ASFD che riconosce le stringhe in $\{a, b\}^*$ terminanti con b

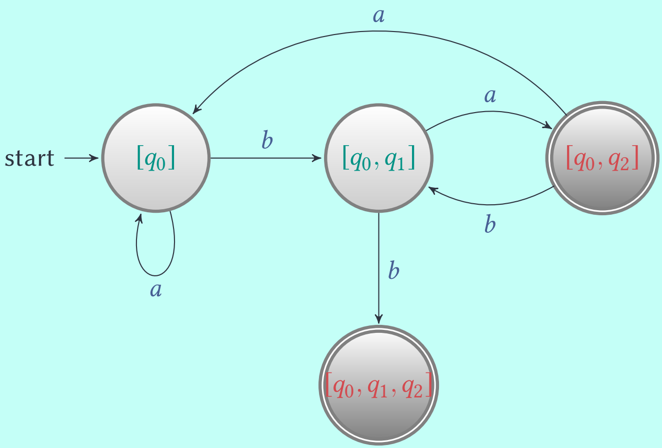


Esempio

ASFND che riconosce le stringhe in $(a+b)^*b(a+b)$



ASFD che riconosce le stringhe in $(a+b)^*b(a+b)$



Esercizio

Costruire l'ASFND e l'ASFD che riconoscono le stringhe $(a+b)^*b(a+b)^k$, per $k = 2, 3$ e 4 e valutare come cresce la dimensione dei due automi al crescere di k.

Esercizio

Data una stringa $x = a_1 \cdots a_r$ definiamo stringa riflessa di x la stringa $\tilde{x} = a_r \cdots a_1$.

Dimostrare che se un linguaggio L è riconosciuto da un ASF, allora esiste un ASF che riconosce il linguaggio $\{\tilde{x} \mid x \in L\}$.

Minimizzazione di automi a stati finiti

L'ASFD con minimo numero di stati che riconosce un dato linguaggio L può essere derivato partizionando l'insieme Q degli stati di un automa che riconosce L in classi di equivalenza rispetto alla relazione

$$q_i \equiv q_j \iff \left(\forall x \in \Sigma^* \; \overline{\delta}(q_i, x) \in F \iff \overline{\delta}(q_j, x) \in F\right).$$

Quindi, $q_i \equiv q_j$ se e solo se ogni stringa che porta da q_i ad uno stato finale porta anche da q_j ad uno stato finale (e vice versa).

Minimizzazione di automi a stati finiti

$\equiv$ è una relazione di equivalenza.

Se $q_i \equiv q_j$ i due stati sono detti indistinguibili

Se esiste una stringa $x \in \Sigma^*$ per cui $\overline{\delta}(q_i, x) \in F$ e $\overline{\delta}(q_j, x) \in Q - F$ (o viceversa) diremo che q_i e q_j sono distinguibili tramite x.

Minimizzazione di automi a stati finiti

La costruzione è basata sul teorema di Myhill-Nerode

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ definiamo la relazione di equivalenza R_L su Σ^* come:

$$xR_Ly \iff \left(\forall z \in \Sigma^* \;\; xz \in L \iff yz \in L\right).$$

Teorema

L è regolare se e solo se R_L partiziona Σ^* in un numero finito di classi di equivalenza.

Teorema di Myhill-Nerode

L regolare:

- sia $A =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ un automa che lo riconosce: assumiamo, senza perdita di generalità, che A abbia un solo stato finale, $F = \{q_F\}$.
- A permette di definire una nuova relazione R_A tra stringhe in Σ^*, in cui

$$xR_Ay \iff \overline{\delta}(q_0, x) = \overline{\delta}(q_0, y)$$

- R_A è una relazione di equivalenza, con un numero di classi al più pari al numero di stati di A: quindi $i(R_A) \leq |Q|$.

Teorema di Myhill-Nerode

- Se $\overline{\delta}(q_0, x) = \overline{\delta}(q_0, y)$, allora per ogni $z \in \Sigma^*$ $\overline{\delta}(q_0, xz) = \overline{\delta}(q_0, yz)$ e quindi $xzR_A yz$
- quindi, per ogni $z \in \Sigma^*$, se $\overline{\delta}(q_0, xz) = q_F$ anche $\overline{\delta}(q_0, yz) = q_F$ (e vice versa), per cui $xz \in L \iff yz \in L$
- ne deriva che $xR_A y \implies xR_L y$, e quindi $i(R_A) \geq i(R_L)$
- dato che $i(R_A) \leq |Q|$ è finito, anche $i(R_L)$ è finito

Teorema di Myhill-Nerode

$i(R_L)$ finito:

Definiamo un ASF $A' = \langle \Sigma, Q', \delta', q_0', F' \rangle$, dove:

1. Q' associa a ogni classe $[x]$ in R_L uno stato $q_{[x]}$
2. $q_0' = q_{[\varepsilon]}$
3. $F' = \{q_{[x]} | x \in L\}$
4. $\delta'(q_{[x]}, a) = q_{[xa]}\ \forall a \in \Sigma$

Teorema di Myhill-Nerode

- Per costruzione, per ogni classe $[x]$ di R_L si ha che $\overline{\delta}'(q_0', z) = q_{[x]}$ per ogni $z \in [x]$
- quindi, se $y, z \in [x]$ allora $yR_{A'}z$ e in generale $xR_Ly \implies xR_{A'}y$ da cui $i(R_L) \geq i(R_{A'})$
- dalla definizione di F', ne consegue immediatamente che A' riconosce L, infatti se $q_{[x]} \in F$ allora $x \in L$ e lo stesso vale per ogni $z \in [x]$, dato che zR_Lx.

Q' è minimo.

Se così non fosse, esisterebbero due stringhe x, y non equivalenti rispetto a R_L e per cui $\overline{\delta}'(q_0', x) = \overline{\delta}'(q_0', y) = q$. Ma allora ne seguirebbe che $\forall z \in \Sigma^* : \overline{\delta}'(q_0', xz) = \overline{\delta}'(q_0', yz)$, il che comporterebbe allora che $x \; R_L \; y$, contrariamente all'ipotesi.

Minimizzazione di automi a stati finiti

Minimizzazione di un ASFD:

- individuazione di tutte le coppie di stati indistinguibili (mediante un algoritmo di marcatura delle coppie distinguibili)
- unificazione degli stati equivalenti, eliminando quelli non raggiungibili e modificando opportunamente la funzione di transizione.

Ipotesi:

tutti gli stati di A sono raggiungibili dallo stato iniziale, altrimenti è necessario un passo preliminare di eliminazione degli stati irraggiungibili.

- Per marcare le coppie di stati distinguibili si utilizza una tabella contenente una casella per ciascuna coppia (non ordinata) di stati di Q
- Le caselle vengono usate per marcare le coppie di stati distinguibili e per elencare, in una lista associata, tutte le coppie che dovranno essere marcate qualora la coppia a cui è associata la casella venga marcata.

Minimizzazione di automi a stati finiti

- La procedura inizia con la marcatura delle coppie distinguibili tramite la stringa ε (tutte e sole le coppie costituite da uno stato finale e da uno non finale)
- Per ogni coppia (p, q) non ancora marcata, si considerano, per ogni $a \in \Sigma$, tutte le coppie (r, s), con $r = \delta(p,)$ e $s = \delta(q, a)$.
    - Se nessuna delle coppie (r, s) è marcata come distinguibile allora si inserisce (p, q) nella lista associata ad ognuna di esse
    - Altrimenti p e q vengono riconosciuti distinguibili e la corrispondente casella viene marcata; qualora questa contenga una lista di coppie si procede (ricorsivamente) con la marcatura delle relative caselle

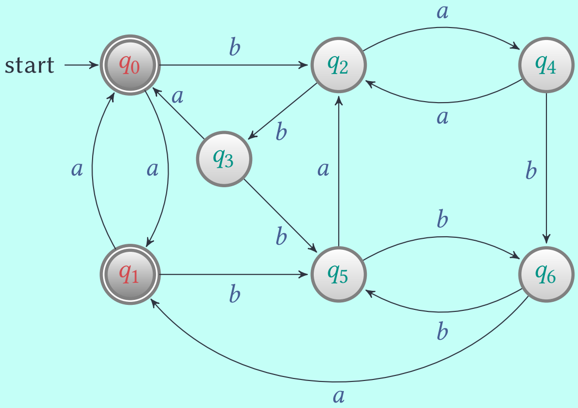
Minimizzazione di automi a stati finiti

```
input automa a stati finiti A = ⟨Σ, Q, δ, q_0, F⟩;
output coppie di stati distinguibili di Q;
begin
  for p ∈ F and q ∈ Q − F do
    marca (p, q) e (q, p);
  for each coppia non marcata di stati distinti do
    if ∃a ∈ Σ : (δ(p, a), δ(q, a)) distinguibili then
      begin
        marca (p, q);
        marca ricorsivamente tutte le coppie non ancora marcate
          sulla lista di (p, q) e su quelle delle coppie marcate
          a questo passo
      end
    else
      for a ∈ Σ do
        if δ(p, a) ≠ δ(q, a) and (p, q) ≠ (δ(p, a), δ(q, a)) then
            aggiungi (p, q) alla lista di (δ(p, a), δ(q, a))
end.
```

Una volta identificate le coppie di stati indistinguibili, ricordando che la relazione di indistinguibilità è una relazione di equivalenza, l'automa equivalente con il minimo numero di stati è dato evidentemente da $A' = \langle \Sigma, Q', \delta', q'_0, F' \rangle$, in cui:

1. Q' è costruito selezionando, per ogni insieme di stati indistinguibili, uno ed un solo stato di Q (rappresentante);
2. F' è costituito da tutti i rappresentanti appartenenti ad F;
3. δ' è ottenuta da δ mediante restrizione al dominio $Q' \times \Sigma$ ed inoltre, per ogni $\delta(q_i, a) = q_j$, con $q_i \in Q'$ e $q_j \in Q$, poniamo $\delta'(q_i, a) = q_k$, dove $q_k \in Q'$ è il rappresentante dell'insieme di stati indistinguibili che include q_j (chiaramente, se $q_j \in Q'$ allora è esso stesso un rappresentante e dunque $q_k = q_j$).

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio



Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

Passo iniziale: q_0 e q_1, finali, distinguibili da tutti gli altri

1						
2	x	x				
3	x	x				
4	x	x				
5	x	x				
6	x	x				
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

Consideriamo le coppie di stati scandendo le celle da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

(q_0, q_1) distinguibile se lo è (q_2, q_5), in quanto $\delta(q_0, b) = q_2$ e $\delta(q_1, b) = q_5$: quindi, $(0, 1)$ inserito nella lista associata a $(2, 5)$

1						
2	x	x				
3	x	x				
4	x	x				
5	x	x	(0,1)			
6	x	x				
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

(q_2, q_3) distinguibile in quanto $\delta(q_2, a) = q_4$, $\delta(q_3, a) = q_0$, e la coppia (q_0, q_4) è distinguibile, (la cella $(0, 4)$ è marcata): quindi viene marcata anche la cella $(2, 3)$

1						
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x				
5	x	x	(0,1)			
6	x	x				
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

Proseguendo, l'algoritmo determina che:

- la coppia (q_2, q_4) è distinguibile se lo è la coppia (q_3, q_6): $(2, 4)$ è inserito nella lista della cella $(3, 6)$;
- la coppia (q_3, q_4) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_2, q_5) è distinguibile se lo sono le coppie (q_2, q_4) e (q_3, q_6): $(2, 5)$ è inserito nelle liste delle celle $(2, 4)$ e $(3, 6)$;
- la coppia (q_3, q_5) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_4, q_5) non è distinguibile;
- la coppia (q_2, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_3, q_6) è distinguibile se lo è la coppia (q_0, q_1): $(3, 6)$ è inserito nella lista della cella $(0, 1)$;
- la coppia (q_4, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_5, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;

Minimizzazione di automi a stati finit: esempioi

1	(3,6)					
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x	(2,5)	x		
5	x	x	(0,1)	x		
6	x	x	x	(2,4) (2,5)	x	x
	0	1	2	3	4	5

Mantenendo le sole indicazioni di coppie distinguibili e non.

1						
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x		x		
5	x	x		x		
6	x	x	x		x	x
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

Dalla tabella, risulta che gli insiemi di stati indistinguibili sono:

$$q_0, q_1$$

$$q_3, q_6$$

$$2_2, q_4, q_5$$

Minimizzazione di automi a stati finiti: esempio

L'automa equivalente col minimo numero di stati risultante dal procedimento è mostrato sotto: o stato q_0 corrisponde alla classe d'equivalenza $\{q_0, q_1\}$, lo stato q_1 corrisponde alla classe $\{q_3, q_6\}$ e lo stato q_3, infine, corrisponde alla classe $\{q_2, q_4, q_5\}$.