

RICHIAMI MATEMATICI

Corso di Fondamenti di Informatica - modulo I

Giorgio Gambosi

a.a. 2023-2024

Insiemi di particolare interesse

simbolo	descrizione
\mathbf{N}	naturali
\mathbf{N}^+	naturali positivi
\mathbf{Z}	interi
\mathbf{Z}^+	interi positivi (coincide con \mathbf{N}^+)
\mathbf{Z}^-	interi negativi
\mathbf{Q}	razionali
\mathbf{Q}^+	razionali positivi
\mathbf{Q}^-	razionali negativi
\mathbf{R}	reali
\mathbf{R}^+	reali positivi
\mathbf{R}^-	reali negativi

- ⊙ Insieme non vuoto di elementi denominati *simboli proposizionali* $A = \{A, B, C, \dots\}$.
- ⊙ Costanti proposizionali \top e \perp . Per contrapposizione, i simboli proposizionali sono anche denominati *variabili proposizionali*.
- ⊙ *Connettivi logici* \neg, \vee e \wedge .
- ⊙ *Separatori* '(' e ')

- ⊙ se a è una variabile o costante proposizionale allora a è una proposizione;
- ⊙ se α è una proposizione allora $(\neg\alpha)$ è una proposizione;
- ⊙ se α e β sono proposizioni allora $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \wedge \beta)$ sono proposizioni;
- ⊙ tutte le proposizioni sono ottenute mediante le regole descritte.

Esempi di proposizioni e non

- ⊙ $((\neg \perp) \vee ((A \vee B) \wedge C))$ è una proposizione.
- ⊙ $A \vee B$ non è una proposizione
- ⊙ $(A \wedge B) \top B$ non è una proposizione

- ⊙ Dominio: insieme $B = \{0, 1\}$, in cui 0 è associato al valore di verità falso e 1 al valore vero
- ⊙ Insieme di operatori $O = \{o_{\neg}, o_{\vee}, o_{\wedge}\}$, contiene un elemento per ciascuno dei connettivi logici del calcolo proposizionale

Negazione logica (*not*)

$\sigma_{\neg} : B \mapsto B$, tale che $\sigma_{\neg}(0) = 1$ e $\sigma_{\neg}(1) = 0$

a	$\neg a$
0	1
1	0

Congiunzione logica (*and*)

$$o_{\wedge} : B \times B \mapsto B$$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disgiunzione logica (or)

$$\alpha_{\vee} : B \times B \mapsto B$$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Assegnazione booleana V

Funzione $V : A \mapsto B$: un'assegnazione booleana alle variabili proposizionali altro non è che una associazione di valori di verità alle variabili stesse.

PROP insieme delle proposizioni, V assegnazione booleana su A .

- ⊙ se $A \in A$, $I_V(A) = V(A)$
- ⊙ $I_V(\top) = 1$
- ⊙ $I_V(\perp) = 0$
- ⊙ se $\alpha \in \text{PROP}$, $I_V(\neg\alpha) = o_{\neg}(I_V(\alpha))$
- ⊙ se $\alpha, \beta \in \text{PROP}$, $I_V(\alpha \vee \beta) = o_{\vee}(I_V(\alpha), I_V(\beta))$
- ⊙ se $\alpha, \beta \in \text{PROP}$, $I_V(\alpha \wedge \beta) = o_{\wedge}(I_V(\alpha), I_V(\beta))$

Una formula proposizionale α viene detta:

- ⊙ *soddisfatta* da una valutazione booleana I_V se $I_V(\alpha) = 1$.
- ⊙ *soddisfacibile* se è soddisfatta da **almeno** una valutazione booleana
- ⊙ *tautologia* se è soddisfatta da **ogni** valutazione booleana
- ⊙ *contraddizione* se non è soddisfatta da **nessuna** valutazione booleana

Implicazione

$$o_{\rightarrow} : B \times B \mapsto B$$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$a \rightarrow b$ equivalente a $\neg a \vee b$

Equivalenza

$$o_{\leftrightarrow} : B \times B \mapsto B$$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$a \leftrightarrow b \text{ equivalente a } (a \leftrightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow a)$$

Operatori k -ari

Dato k , esistono 2^{2^k} operatori differenti $B^k \mapsto B$.

Se $k = 2$:

a	b	zero	and (\wedge)	n-implicazione (\nrightarrow)	operando-1	n-implicato (\leftarrow)	operando-2	ex-or (\oplus)	or (\vee)	nor ($\dot{\vee}$)	equivalenza (\leftrightarrow)	n-operando-2	implicato (\leftarrow)	n-operando-1	implicazione (\rightarrow)	nand ($\hat{\wedge}$)	uno
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Completezza di $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Ogni operatore binario è equivalente ad una opportuna composizione degli operatori $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Proprietà degli operatori 1

<i>idempotenza</i>	$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
<i>associatività</i>	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$
<i>commutatività</i>	$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \leftrightarrow \alpha$
<i>distributività</i>	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Proprietà degli operatori 2

<i>assorbimento</i>	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
<i>doppia negazione</i>	$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
<i>leggi di De Morgan</i>	$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
<i>terzo escluso</i>	$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \top$
<i>contrapposizione</i>	$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
<i>contraddizione</i>	$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \perp$

Calcolo dei predicati

- ⊙ *quantificatore universale*, indicato con il simbolo \forall
 $\forall xP(x)$, P è vero per qualunque valore di x
- ⊙ *quantificatore esistenziale*, indicato con il simbolo \exists
 $\exists xP(x)$, P è vero per almeno un valore di x

- ⊙ Prodotto cartesiano di A e B , denotato con $C = A \times B$

$$C = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\},$$

- ⊙ A^n indica il prodotto cartesiano di A con se stesso, ripetuto n volte

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}}$$

- ⊙ Relazione n -aria R su A_1, A_2, \dots, A_n è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Una relazione $R \subseteq A^2$ si dice **relazione d'ordine** se per ogni $x, y, z \in A$ valgono le seguenti proprietà

1. $\langle x, x \rangle \in R$ (**riflessività**),
2. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \iff x = y$ (**antisimmetria**),
3. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \iff \langle x, z \rangle \in R$ (**transitività**).

Relazione d'equivalenza

Una relazione $R \subseteq A^2$ si dice **relazione d'equivalenza** se, per ogni $x, y, z \in A$, valgono le seguenti proprietà

1. $\langle x, x \rangle \in R$ (**riflessività**),
2. $\langle x, y \rangle \in R \iff \langle y, x \rangle \in R$ (**simmetria**),
3. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \iff \langle x, z \rangle \in R$ (**transitività**).

Relazione d'equivalenza

- ⊙ Un insieme A su cui sia definita una relazione d'equivalenza R si può partizionare in sottoinsiemi, detti **classi d'equivalenza**, ciascuno dei quali è un sottoinsieme massimale che contiene solo elementi tra loro equivalenti.
- ⊙ Dati un insieme A ed una relazione d'equivalenza R su A^2 , l'insieme delle classi d'equivalenza di A rispetto a R è detto insieme **quoziente** A/R .
- ⊙ I suoi elementi vengono denotati con $[a]$, dove $a \in A$ è un *rappresentante* della classe d'equivalenza: $[a]$ indica cioè l'insieme degli elementi equivalenti ad a .

Operazioni tra relazioni

- ⊙ Unione: $R_1 \cup R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R_1 \vee \langle x, y \rangle \in R_2\}$
- ⊙ Intersezione: $R_1 \cap R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2\}$
- ⊙ Complementazione: $\bar{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R\}$
- ⊙ Chiusura transitiva:

$$R^+ = \{\langle x, y \rangle \mid \exists y_1, \dots, y_n \in A, n \geq 2, y_1 = x, y_n = y, \\ \langle y_i, y_{i+1} \rangle \in R, i = 1, \dots, n - 1\}$$

- ⊙ Chiusura transitiva e riflessiva: $R^* = R^+ \cup \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$

$R \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ ($n \geq 2$) è una **relazione funzionale** tra una $(n - 1)$ -pla di elementi e l' n -esimo elemento, se $\forall \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \in X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ esiste al più un elemento $x_n \in X_n$ tale che $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$

$$f : X_1 \times \dots \times X_{n-1} \mapsto X_n.$$

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n.$$

- ⊙ $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$, **dominio** della funzione, $\text{dom}(f)$
- ⊙ X_n , **codominio** $\text{cod}(f)$
- ⊙ **dominio di definizione:**

$$\begin{aligned} \text{def}(f) = \{ \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \in \text{dom}(f) \mid \\ \exists x_n \in \text{cod}(f) : f(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n \} \end{aligned}$$

- ⊙ **immagine** $\text{imm}(f)$:

$$\begin{aligned} \text{imm}(f) = \{ x_n \in \text{cod}(f) \mid \\ \exists \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \in \text{dom}(f) : f(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n \} \end{aligned}$$

- ⊙ f **totale** se $\text{def}(f) = \text{dom}(f)$, **parziale** altrimenti
- ⊙ f **suriettiva** se $\text{imm}(f) = \text{cod}(f)$
- ⊙ f **iniettiva** o **uno-ad-uno (1:1)** se

$$\begin{aligned} &\forall \langle x'_1, \dots, x'_{n-1} \rangle, \langle x''_1, \dots, x''_{n-1} \rangle \in X_1 \times \dots \times X_{n-1}, \\ &\langle x'_1, \dots, x'_{n-1} \rangle \neq \langle x''_1, \dots, x''_{n-1} \rangle \iff \\ &f(x'_1, \dots, x'_{n-1}) \neq f(x''_1, \dots, x''_{n-1}) \end{aligned}$$

- ⊙ f **biiettiva** se suriettiva e iniettiva

Pigeonhole principle

Dati due insiemi finiti A e B , tali che

$$0 < |B| < |A|$$

non esiste alcuna funzione iniettiva totale $f : A \mapsto B$

Dato un insieme non vuoto $S \subseteq U$, si definisce **operazione binaria** \circ su S una funzione $\circ : S \times S \mapsto U$.

Un insieme non vuoto S si dice **chiuso** rispetto ad una operazione binaria \circ su S se $\text{imm}(\circ) \subseteq S$.

Dato un insieme S chiuso rispetto ad un'operazione binaria \circ .

La coppia $\langle S, \circ \rangle$ viene denominata **semigrupp** se l'operazione binaria \circ soddisfa la proprietà associativa:

$$\forall x \forall y \forall z \in S \quad (x \circ (y \circ z)) = (x \circ y) \circ z).$$

Se inoltre vale la proprietà commutativa:

$$\forall x \forall y \in S \quad (x \circ y) = (y \circ x)$$

il semigrupp è detto **commutativo**.

La coppia $\langle \mathbf{N}, + \rangle$, dove $+$ è l'usuale operazione di somma, è un semigrupp commutativo,

La terna $\langle S, \circ, e \rangle$ viene detta **monoide** se $\langle S, \circ \rangle$ è un semigruppò, e se $e \in S$ è tale che:

$$\forall x \in S \quad (e \circ x) = (x \circ e) = x$$

L'elemento e viene detto **elemento neutro** o **unità** del monoide. Se \circ è anche commutativa, il monoide viene detto **commutativo**.

Le terne $\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbf{N}, *, 1 \rangle$, dove $+$ e $*$ sono le usuali operazioni di somma e prodotto, sono monoidi commutativi.

Dati un insieme S ed una operazione associativa \circ , definiamo **semigruppone libero** sulla coppia $\langle S, \circ \rangle$ il semigruppone $\langle S^+, \circ^+ \rangle$, dove:

1. S^+ è l'insieme di tutte le espressioni $x = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$, per ogni $n \geq 1$, con $x_1, \dots, x_n \in S$;
2. l'operazione \circ^+ è definita nel modo seguente: se $x = x_1 \circ \dots \circ x_n$ e $y = y_1 \circ \dots \circ y_m$, allora $x \circ^+ y = x_1 \circ \dots \circ x_n \circ y_1 \circ \dots \circ y_m$.

Se estendiamo S^+ introducendo un elemento aggiuntivo ε , detto **parola vuota**, possiamo definire sull'insieme risultante $S^* = S^+ \cup \{\varepsilon\}$ l'operazione \circ^* , estensione di \circ^+ , tale che, $\forall x, y \in S^+ \ x \circ^* y = x \circ^+ y$ e $\forall x \in S^* \ (\varepsilon \circ^* x = x \circ^* \varepsilon = x)$.

La terna $\langle S^*, \circ^*, \varepsilon \rangle$ è allora un monoide e viene detto **monoide libero**.

La terna $\langle S, \circ, e \rangle$ viene detta **gruppo** se $\langle S, \circ, e \rangle$ è un monoide ed inoltre l'operazione \circ ammette inverso, cioè se

$$\forall x \in S \exists y \in S (x \circ y) = (y \circ x) = e.$$

L'elemento y viene detto **inverso** di x , e si denota come x^{-1} .

Se il monoide $\langle S, \circ, e \rangle$ è commutativo il gruppo viene detto **commutativo** (o **abeliano**).

Le terne $\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbf{N}, *, 1 \rangle$ non sono gruppi, in quanto l'insieme \mathbf{N} non è chiuso rispetto all'inverso di $+$ e di $*$. Al contrario, le terne $\langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbf{Q}, *, 1 \rangle$ sono gruppi abeliani.

Dato un semigruppò $\langle S, \circ \rangle$, una **congruenza** \equiv è una relazione d'equivalenza su S che soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall x, y \in S \quad x \equiv y \iff \forall z \in S \quad ((x \circ z \equiv y \circ z) \wedge (z \circ x \equiv z \circ y)).$$

La relazione d'equivalenza \equiv_k delle classi resto rispetto alla divisione per k è una congruenza rispetto al semigruppò commutativo $\langle \mathbf{N}, + \rangle$: infatti, se $n \equiv_k m$, abbiamo che $\forall l \ (n + l \equiv_k m + l)$ e, chiaramente, anche $l + n \equiv_k l + m$. Viceversa, se $\forall l \ (n + l \equiv_k m + l)$ allora abbiamo, nel caso particolare $l = 0$, $n \equiv_k m$